CAPITULO I: Función Lineal

A. Variables, constantes, y dependencia (repaso)

Durante el sétimo año, a través de la unidad de relaciones y álgebra, se estudió qué son las constantes, las variables, y cómo se pueden formalizar relaciones entre ellas.

A manera de resumen, recordamos los conceptos:

Constante: Es una cantidad que no varía. Es un número por sí solo, el cual se representa a veces mediante algún símbolo o letra particular

Variable: Es una cantidad, generalmente representada con un símbolo, que representa un valor de un conjunto dado de números.

Al realizar el análisis de las cantidades variables, podremos identificar que el valor de algunas depende del valor de las otras.

Por ejemplo, el área de un cuadrado depende de cuánto mide el lado.

Así, en ciertas situaciones podemos distinguir entre **variables independientes** que pueden tomar cualquier valor sujeto a las condiciones del problema, y **variables dependientes** cuyo valor depende justamente del valor de la variable independiente.

En general, nos interesará conocer cuál es la relación que existe entre las variables de un problema.

Variable dependiente: Es aquella que depende de los valores que puede tomar la variable independiente.

Variable independiente: Variable a la cual se le pueden asignar valores de forma libre para observarlas variaciones que presenta la variable dependiente.

Ejercicio A.

Indique las **variables**, cuál es **dependiente**, y cuál **independiente**, así como las **constantes** en cada problema. Además, encuentre lo solicitado.

1. Giselle va a la pulpería a comprar cierta cantidad de refrescos. Si cada refresco cuesta $¢250$:

- **a)** ¿Cuántos refrescos puede comprar con un billete de $¢1000$?
- **b)** ¿Cuántos refrescos puede comprar con un billete de $¢5000$?
- **c)** Exprese en términos del dinero que lleva Giselle, cuántos refrescos puede comprar.

2. Un automóvil viaja a una velocidad constante de $55 \, {}^{km}\!/_{h}$.

- **a)** Exprese el tiempo que le tarda recorrer una distancia de d kilómetros.
- **b)** Para el caso de $d = 440$, ¿cuánto tarda?

3. El precio de un marcador para pizarra es 500. Una caja de marcadores contiene 12 de ellos. Sea "x" el total a pagar por n cajas de marcadores.

a) Exprese n en términos de x.

b) ¿Cuántas cajas se puede comprar con ¢$6\,000$?

c) ¿Cuál es el precio a pagar por 12 cajas?

4. En un campeonato entre dos jugadores, de 48 juegos, se asigna dos puntos al ganador, y ninguno al perdedor, suponga que no hay empates.

a) Exprese el puntaje total de un jugador en términos del número de partidos perdidos "x".

b) Si se pierden el doble de partidos de los que se ganan, ¿cuántos puntos se obtienen?

5. En una fábrica gastan ¢1500 por cada par de zapatos elaborado y tiene un gasto de ¢15000 diarios de gastos fijos.

a) ¿Cuánto gastan en la elaboración de 50 pares de zapatos en un día?

b) ¿100 pares?

c) ¿1000 pares?

d) ¿x pares?

6. Un carpintero gasta ¢5000 en materiales por cada mesa elaborada más un gasto fijo de ¢$25\,000$ por día

a) ¿Cuánto mesas puede elaborar con un presupuesto de ¢$150\,000$ para un día?

b) ¿Qué pasa si duplica el presupuesto?

c) Para un presupuesto de x, ¿cuántas mesas puede elaborar?

7. Un transporte público cobrar ¢250 por persona que transporte y gasta cuatro litros de gasolina en el trayecto. Si el costo de la gasolina es ¢600 el litro.

a) ¿Cuánto gana el dueño del transporte si 70 personas viajaron en un solo viaje?

b) ¿Cuánto gana el dueño del transporte si 80 personas viajaron en tres viajes?

c) Supongamos que n personas viajarán en d viajes. Exprese en términos de n y d, la ganancia del transportista.

8. Un joven es contratado por su padre, y le pagará ¢50000 por atenderle la tienda de su familia durante cuatro días de sus vacaciones. Además le pagará ¢500 colones por cada artículo que venda.

a) Si el joven vendió 25 artículos ¿Cuánto ganó el joven durante ese tiempo?

b) ¿Y si vendió 75?

Suponga que cada día vende n artículos, y que además cada día gasta ¢m

c) ¿Cuánto le queda si $n = 5$, $m =$ ¢12000?

d) Exprese el dinero que le queda en términos de n y m.

9. En un trapecio la base menor mide $8cm$ y la altura es $4cm$.

a) Originalmente, la base mayor mide $12cm$. ¿Cuánto sería el área del trapecio?

b) La base mayor se va alargando. ¿Qué pasa con el área si la base mayor se duplica?

c) Exprese en términos de la base mayor, el área del trapecio.

B. Ecuación de la recta

Ejercicio Introductorio B.

En una empresa, se observó la siguiente tabla con respecto a la producción de cierto artículo:

x: cantidad	2	4	7	10	12
y: costo	175	200	237,5	275	300

Se pretende determinar los costos de producir otras cantidades.

1. Grafique los puntos en un plano cartesiano, ¿qué relación parecen tener?

2. Con respecto a la tabla, al aumentar la cantidad (x) en dos unidades, ¿Cuánto aumento el costo?

3. Con respecto a la tabla, al aumentar la cantidad en tres unidades, ¿Cuánto aumento el costo?

4. Con respecto a la respuesta en 1. Calcule cuánto aumenta el costo cuanto la cantidad aumenta en una unidad. Compare el resultado con el obtenido en la pregunta 2.

5. Supongamos el patrón de aumentos se mantiene. Si se aumenta la cantidad en 150 productos, ¿cuánto aumentará el costo? ¿Cuál será el costo de producir 160 productos?

6. ¿Cuál es el costo fijo de la empresa? (correspondiente a producir 0 productos)

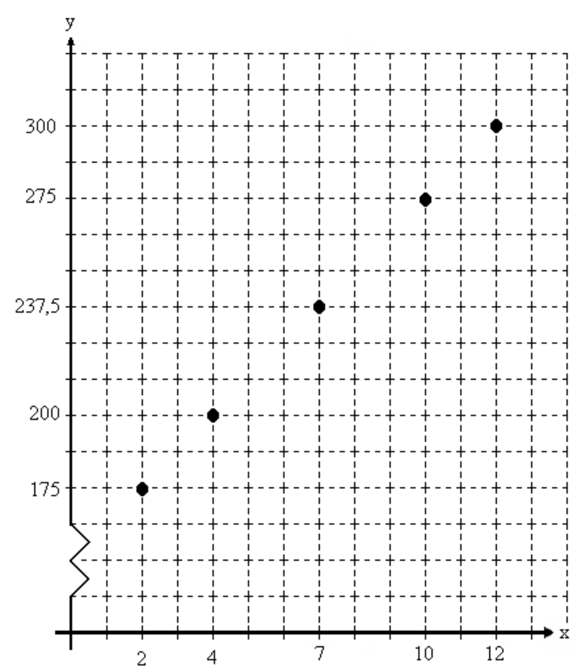
7. Exprese en términos de la cantidad de artículos, el costo de producción.

Como hemos estado viendo, algunas relaciones geométricas que se dan en un plano cartesiano, se pueden representar mediante una **ecuación algebraica**.

En el ejercicio anterior, se presenta una situación donde el aumento de la variable dependiente es siempre igual con respecto al aumento de una variable independiente.

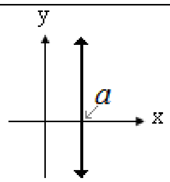
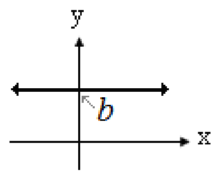
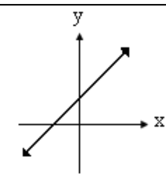
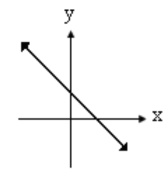
Cuando representamos en un plano cartesiano una situación de este tipo obtendremos siempre que los puntos siguen una línea.

En esta sección estudiaremos con detalle la relación entre las rectas en el plano y las ecuaciones lineales, siempre teniendo claro que estas lo que representan es un aumento constante de una variable con respecto a otra. Este el concepto de **pendiente.**

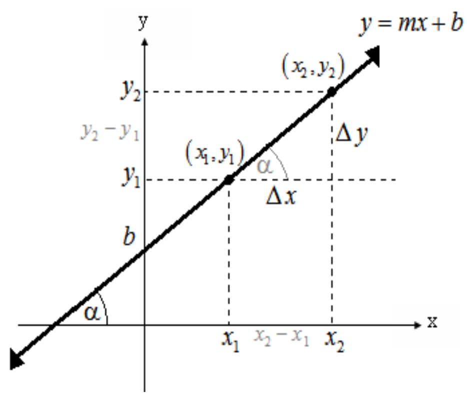


También en el ejemplo, vimos como se pueden tener valores de la segunda variable aun cuando la primera tenga un valor nulo. Aquí tenemos el concepto de **intersección con el eje y.**

En la siguiente tabla tenemos las posibles posiciones de una recta, y en la última fila la manera algebraica de representarla, y a esta la llamamos **ecuación de la recta:**

Recta **vertical**	Recta **horizontal**	Recta **creciente**	Recta **decreciente**
			
Todos los puntos de esta recta tienen la misma coordenada en x, mientras que su coordenada en y toma cualquier valor.	Todos los puntos de esta recta tienen la misma coordenada en y, mientras que su coordenada en x toma cualquier valor.	Al aumentar el valor de la x, el valor de y **aumenta**, siempre en la misma proporción.	Al aumentar el valor de la x, el valor de y **disminuye**, siempre en la misma proporción.
$x = a$	$y = b$	$y = mx + b, \quad m > 0$	$y = mx + b, \quad m < 0$

En las últimas dos rectas, hablamos de una proporción en la que cambia y con respecto al cambio de x. Esta proporción la denotamos con m y la llamamos la pendiente de la recta.



La **pendiente m** de una recta indica: cuántas unidades cambia y por cada cambio en una unidad de x.

Entonces, el valor de m lo podemos calcular como el cambio de y, denotado Δy, entre el cambio de x, denotado Δx.

Así, $\Delta y = y_2 - y_1$ y $\Delta x = x_2 - x_1$ y

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} \Rightarrow m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Ahora bien, si $m > 0$ indica que y aumenta cuando aumenta x, por lo que tenemos una recta creciente.

Si $m < 0$, entonces y disminuye cuando x aumenta, por lo que la recta es decreciente,

Si $m = 0$ lo que sucede es que y no cambia al aumentar x y la recta es horizontal, es decir y tiene un valor constante.

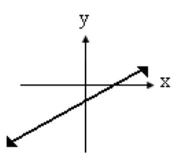
Si una recta es **creciente**, entonces $\boldsymbol{m > 0}$, si es **decreciente** $\boldsymbol{m < 0}$.

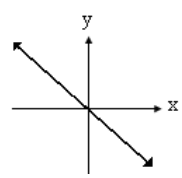
Si es una **recta horizontal**, entonces $\boldsymbol{m=0}$ y las rectas verticales no tienen pendiente.

El otro término de la ecuación de la recta es b y este representa la intersección de la recta con el eje y, correspondiente a $x=0$.

De esta forma completamos la **ecuación de la recta** $y=mx+b$, en lo que llamamos forma **pendiente – intersección.**

EJEMPLO 1. En las siguientes figuras determine el signo de m y b de las rectas mostradas.





Para esbozar[1] la gráfica una recta, basta considerar la monotonía (con base en el signo de m) y señalar b en el eje y.

EJEMPLO 2. Para las siguiente ecuaciones, encuentre el valor de m y b, clasifique la recta y esboce la gráfica.

$\boldsymbol{y=4x}$, $\boldsymbol{y=-3x+5}$, $\boldsymbol{y=\frac{5x-12}{4}}$, $\boldsymbol{y=-4}$, $\boldsymbol{x=2}$

EJEMPLO 3. Encuentre las ecuaciones de la recta vertical y horizontal que pasan por el punto $\boldsymbol{(-3,5)}$

Ahora, estudiaremos cómo encontrar la ecuación de una recta, dados dos puntos.

Para esto, primero debemos ver qué hacer si tenemos la pendiente y un punto, para encontrar la intersección con el eje y:

Para encontrar **la intersección con el eje y** "b" dada la pendiente y un punto, se sustituyen los valores de m y las coordenadas de un punto en la ecuación $y=mx+b$.

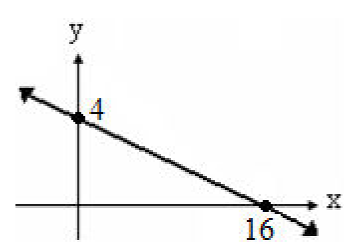
EJEMPLO 4. Encuentre la ecuación de la recta que tiene pendiente $\boldsymbol{\frac{2}{5}}$ y pasa por el punto $\boldsymbol{(-1,3)}$

Por último, para encontrar la pendiente, es suficiente recordar cómo fue construido su concepto:

Para encontrar **la pendiente** "m" dados dos puntos: Si los puntos (x_1,y_1) y (x_2,y_2) pertenecen a la recta con ecuación $y=mx+b$ entonces, se puede calcular m mediante la fórmula $\boldsymbol{m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}}$.

EJEMPLO 5. Encuentre la ecuación de la recta que pasa por los puntos $\boldsymbol{\left(\frac{3}{2},\frac{-2}{5}\right)}$ y $\boldsymbol{\left(\frac{-3}{2},\frac{7}{5}\right)}$.

EJEMPLO 6. Encuentre la ecuación de la recta mostrada en la siguiente figura:

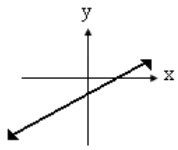
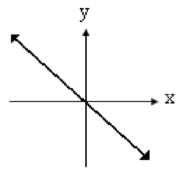


EJEMPLO 7. Encuentre las intersecciones con los ejes de la recta que pasa por $\boldsymbol{(2,6)}$ y $\boldsymbol{(-1,-6)}$.

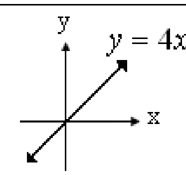
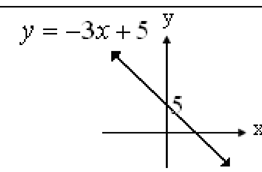
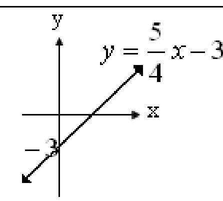
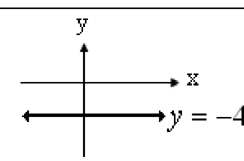
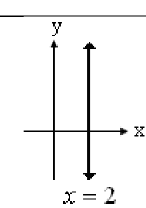
[1] Con esbozar una gráfica nos referimos a hacer una gráfica **no a escala**, pero que refleja las propiedades de la función.

Soluciones B.

EJEMPLO 1. En las siguientes figuras determine el signo de m y b de las rectas mostradas.

	Tenemos que la recta es creciente y, por lo tanto, $m > 0$. La intersección con el eje y, está **por debajo** del eje x, entonces debe ser negativa: $b < 0$.
	Tenemos que la recta es decreciente y, por lo tanto, $m < 0$. La intersección con el eje y, está **sobre** el eje x, entonces debe ser nula: $b = 0$.

EJEMPLO 2. Para las siguiente ecuaciones, encuentre el valor de m y b, clasifique la recta y esboce la gráfica.

Ecuación	m	b	Clasificación	Gráfica
$y = 4x$	4	0	Creciente	
$y = -3x + 5$	-3	5	Decreciente	
$y = \frac{5x - 12}{4}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{-12}{4}$, es decir -3	Creciente	
$y = -4$	0	-4	Horizontal	
$x = 2$	Indefinida	Indefinida	Vertical	

EJEMPLO 3. Encuentre las ecuaciones de la recta vertical y horizontal que pasan por el punto $(-3, 5)$.

La recta vertical debe tener ecuación $x = -3$ y la recta horizontal $y = 5$.

EJEMPLO 4. Encuentre la ecuación de la recta que tiene pendiente $\frac{2}{5}$ y pasa por el punto $(-1,3)$.

En este caso, tenemos que $m=\frac{2}{5}$ y para encontrar b, sustituimos los datos del punto $(-1,3)$ y el valor de m en la ecuación de la recta así:

$$y=mx+b \Rightarrow 3=\left(\frac{2}{5}\right)(-1)+b$$

$$\Rightarrow 3=\frac{-2}{5}+b \Rightarrow b=3+\frac{2}{5}=\frac{17}{5}$$

Entonces, la ecuación de la recta es $y=\frac{2}{5}x+\frac{17}{5}$ que podemos expresar $y=\frac{2x+17}{5}$.

EJEMPLO 5. Encuentre la ecuación de la recta que pasa por los puntos $\left(\frac{3}{2},\frac{-2}{5}\right)$ y $\left(\frac{-3}{2},\frac{7}{5}\right)$.

Para encontrar m nombramos los puntos de la siguiente manera: $\left(\underbrace{\frac{3}{2}}_{x_1},\underbrace{\frac{-2}{5}}_{y_1}\right)$ y $\left(\underbrace{\frac{-3}{2}}_{x_2},\underbrace{\frac{7}{5}}_{y_2}\right)$.Luego, sustituimos en la fórmula:

$$m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{\left(\frac{7}{5}\right)-\left(\frac{-2}{5}\right)}{\left(\frac{-3}{2}\right)-\left(\frac{3}{2}\right)}=\frac{\frac{7+2}{5}}{\frac{-3-3}{2}}=\frac{\frac{9}{5}}{-3}=\frac{\cancel{9}^{\,3}}{5}\cdot\frac{1}{-\cancel{3}}=\frac{-3}{5}.$$

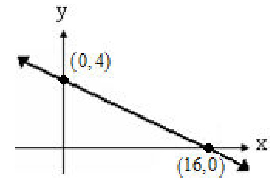
Para calcular b utilizamos el mismo procedimiento:

$$y=mx+b \Rightarrow \frac{7}{5}=\left(\frac{-3}{5}\right)\left(\frac{-3}{2}\right)+b \Rightarrow \frac{7}{5}=\frac{9}{10}+b$$

$$\Rightarrow b=\frac{7}{5}-\frac{9}{10}=\frac{14-9}{10}=\frac{5}{10}=\frac{1}{2}$$

De donde la ecuación de la recta es $y=\frac{-3}{5}x+\frac{1}{2}$ o bien $y=\frac{-6x+5}{10}$.

EJEMPLO 6. Encuentre la ecuación de la recta que mostrada en la siguiente figura:

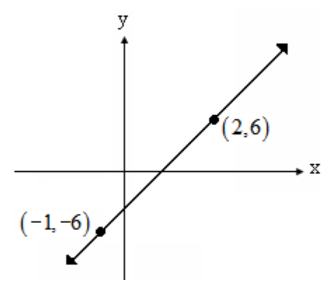


Reescribiendo las intersecciones como pares ordenados, tenemos que la recta pasa por los puntos $\left(\underbrace{0}_{x_1},\underbrace{4}_{y_1}\right)$ y $\left(\underbrace{16}_{x_2},\underbrace{0}_{y_2}\right)$

Entonces: $m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{0-4}{16-0}=\frac{-4}{16}=\frac{-1}{4}$.

Ahora, como la recta interseca el eje y en el punto $(0,b)$ entonces no tenemos que hacer ningún cálculo adicional $y=\frac{-x}{4}+4$.

EJEMPLO 7. Encuentre las intersecciones con los ejes de la recta que pasa por $(2,6)$ y $(-1,-6)$.



Primero encontramos la ecuación de la recta con el procedimiento usual: $m=\frac{6-(-6)}{2-(-1)}=\frac{12}{3}=4$ y sustituyendo el punto $(2,6)$ en $y=mx+b$.

$\Rightarrow\ 6=4\cdot 2+b \Rightarrow\ 6=8+b \Rightarrow\ b=-2$. La ecuación de la recta es $y=4x-2$.

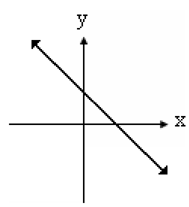
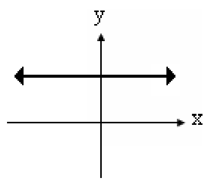
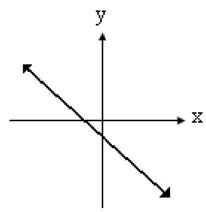
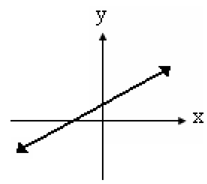
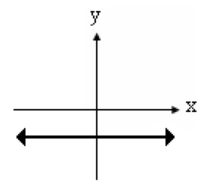
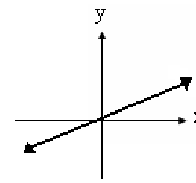
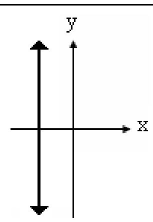
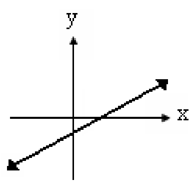
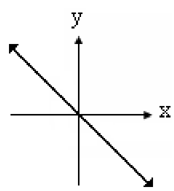
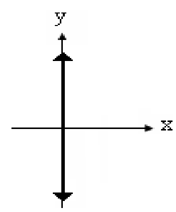
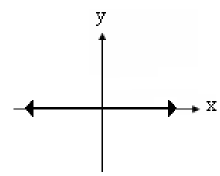
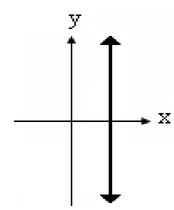
Recordemos que b representa la intersección con el eje y, de donde esta es $(0,-2)$ y para el eje x, debemos sustituir $y=0$ y encontrar el valor de x.

Así: $y=4x-2 \Rightarrow 0=4x-2 \Rightarrow 2=4x$

$\Rightarrow x=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$ y la intersección con el eje x es $\left(\frac{1}{2},0\right)$

Ejercicio B.

I PARTE: En las siguientes figuras encuentre los signos de m y b de la ecuación de la recta mostrada.

1.	**2.**	**3.**	**4.**	**5.**	**6.**
					
7.	**8.**	**9.**	**10.**	**11.**	**12.**
					

II PARTE: Para las siguiente ecuaciones, encuentre el valor de m y b .Clasifique la recta y esboce la gráfica.

Ecuación	$\boldsymbol{m}$	$\boldsymbol{b}$	**Clasificación**	**Gráfica**
$y=-2x+1$				
$x=-3$				
$y=-1$				
$y=0,01x-2$				
$y=\dfrac{3x-5}{2}$				
$y=\dfrac{4-5x}{2}$				
$y=-2^{-2}x-3$				
$y=-x-3$				
$y=3x+2$				

III PARTE: En cada uno de los siguientes casos, encuentre las intersecciones con los ejes y la ecuación de la recta.

1. Pasa por $(5,6)$ y tiene pendiente igual a -4.

2. Pasa por $(2,0)$ y tiene pendiente igual a 5.

3. Tiene pendiente $\frac{-3}{5}$ y pasa por el punto $(10,-1)$.

4. Tiene pendiente $\frac{2}{3}$ y pasa por el punto $(7,5)$.

5. Pasa por $(-4,-6)$ y $(4,8)$.

6. Pasa por los puntos $\left(\frac{1}{2},\frac{-3}{7}\right)$ y $\left(\frac{-3}{2},\frac{5}{7}\right)$.

7. Pasa por los puntos $\left(\frac{3}{5},\frac{1}{4}\right)$ y $\left(\frac{-2}{5},\frac{7}{4}\right)$

8. Pasa por los puntos $\left(5,\frac{1}{2}\right)$ y $\left(\frac{-1}{3},4\right)$.

9. Es horizontal y pasa por el punto $(2,3)$.

10. Es vertical y pasa por el punto $(2,3)$.

11. Tiene pendiente nula y pasa por $(5,-4)$

12. No tiene pendiente definida y pasa por $(1,6)$

IV PARTE: En cada uno de los siguientes casos determine la ecuación de la recta que:

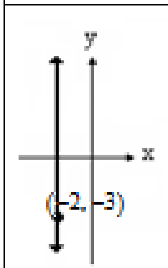
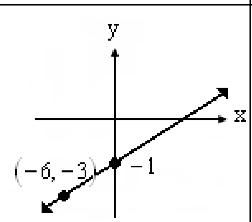
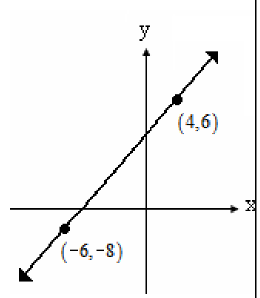
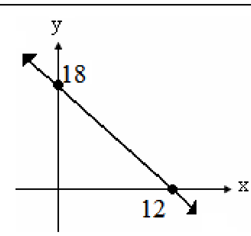
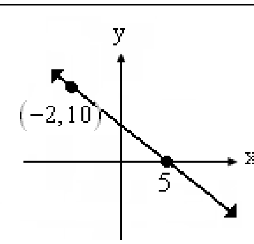
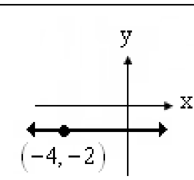
1. Tiene pendiente -3 e interseca el eje y $(0,6)$

2. Interseca los ejes en los puntos $(0,5)$ y $(-15,0)$.

3. Interseca el eje y en 4 y el x en 6.

4. Tiene pendiente $\frac{3}{5}$ e interseca el eje de x en $(-4,0)$.

V PARTE: En las siguientes figuras encuentre la ecuación de la recta mostrada.

1.	**2.**	**3.**	**4.**	**5.**	**6.**
					

C. Función lineal

Ejercicio Introductorio C. Un grupo de estudiantes decide organizar un paseo, en el cual saben que el costo por hospedaje y alimentación será ¢$2\,500$ de por cada estudiante. Además, deben pagar ¢$30\,000$ correspondiente al costo de transporte para todos, independientemente de la cantidad de estudiantes que asistan.

1. ¿Cuánto deben pagar en total si al viaje fueran 30 estudiantes?
2. Luego, 5 estudiantes más deciden participar también. ¿En cuánto aumenta el costo total?
3. Si x representa el número de estudiantes que asistirá al paseo, exprese en función de x el costo total $f(x)$ del viaje.

Al inicio de esta unidad vimos como en las relaciones entre variables aparecen constantemente relaciones entre magnitudes directamente proporcionales.

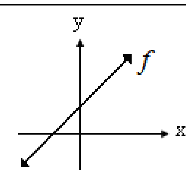
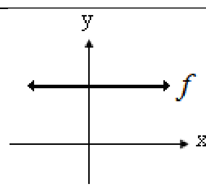
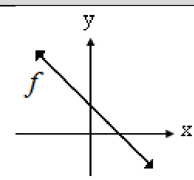
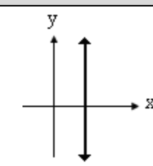
Por ejemplo, el precio de cierta cantidad de hamburguesas es proporcional al número de hamburguesas. La distancia que recorre un carro a una cierta velocidad constante es proporcional al tiempo en que viaja. Las conversiones de una escala a otra son siempre ejemplo de magnitudes directamente proporcionales.

Además, en ocasiones a las proporciones que hablamos se les debe sumar una constante por diversas situaciones hasta llegar a criterios de la forma $f(x)=mx+b$. Estas relaciones se modelan con las **funciones lineales**.

Es importante en este tema tener presente todos los resultados que se estudiaron en la sección de ecuación de la recta.

Las gráficas de funciones de la forma $f(x)=mx+b$ son rectas, por eso las llamamos funciones **lineales.**

Dependiendo del signo de m que es la **pendiente**, tenemos las siguientes posibilidades:

	
La función es estrictamente **creciente** si $\boldsymbol{m>0}$.	La función es **constante** si $\boldsymbol{m=0}$. La gráfica es una recta horizontal.
	
La función es estrictamente **decreciente** si $\boldsymbol{m<0}$.	Las rectas verticales **no** corresponden a ninguna función.

- Las **funciones lineales** relacionan dos variables, donde la razón de cambio (aumento o disminución) es siempre el mismo.

Recordando el concepto asociado que se vio en la ecuación de la recta: Una pendiente positiva significa que $f(x)$ aumenta cuando x aumenta, mientras que una pendiente negativa indica que $f(x)$ disminuye cuando x aumenta

EJEMPLO 8. Encuentre el criterio de una función lineal tal que, $f(2)=4$ y $f(3)=-4$

En la vida cotidiana encontramos muchas situaciones que se pueden representar con una recta, y por tanto, son ejemplos de funciones lineales. La idea es analizar qué información nos da la pendiente para estos casos.

EJEMPLO 9. La cantidad q de CD´s que un joven compra se modela con el criterio $q(p)=\frac{-p}{1000}+10$, donde p representa el precio.

a) ¿Cuántos discos compra si el precio es ¢$4\,000$?

b) ¿Qué sucede si hay un aumento en el precio?

EJEMPLO 10. Una empresa construye un residencial de 45 casas, para lo cual necesita 20 trabajadores. Si después quiere construir un residencial con 63 casas, ¿Cuántos trabajadores necesitan contratar? ¿Y si quiere construir 387 casas?

EJEMPLO 11. El precio de cierto tipo de computadoras es $\$800$, y se debe pagar $\$40$ de gastos de envío por cada compra hecha.

a) Exprese el precio a pagar por compra en función del número de computadoras compradas

b) Calcule el precio que debe pagar una empresa al comprar 300 computadoras.

c) Si una empresa pagó $\$18\,440$, ¿cuántas computadoras compró?

EJEMPLO 12. Una compañía discográfica tiene costos fijos al grabar un disco independientemente de la cantidad de discos que reproduzca. Además, sabe que el costo total de producir 10 discos compactos es ¢$15\,000$ y el costo total de producir 15 discos es ¢$20\,000$. ¿Cuánto cuesta producir 20 discos?

EJEMPLO 13. En el país X, los taxis cobran cierta tarifa básica, además de $\$3$ por cada kilómetro recorrido. Un hombre viajó $12km$ y pagó $\$40$. ¿Cuánto viajó un hombre que pagó $\$61$?

Soluciones C.

EJEMPLO 8. Encuentre el criterio de una función lineal tal que, $f(2)=4$ y $f(3)=-4$

Se deduce que los puntos $\left(\underbrace{2}_{x_1},\underbrace{4}_{y1}\right)$ y $\left(\underbrace{3}_{x_2},\underbrace{-4}_{y_2}\right)$ pertenecen a la gráfica de $f(x)=mx+b$ y como la función es lineal, su gráfica es una recta.

Por lo tanto, podemos aplicar la fórmula de m y el procedimiento para encontrar b que usamos siempre:

$$m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{-4-4}{3-2}=\frac{-8}{1}=-8\Rightarrow f(x)=-8x+b.$$

Además, $f(2)=4\Rightarrow -8\cdot 2+b=4$

$\Rightarrow b=4+16\Rightarrow b=20$ y, por lo tanto, el criterio es $f(x)=-8x+20$.

EJEMPLO 9. La cantidad q de CD´s que un joven compra se modela con el criterio $q(p)=\frac{-p}{1000}+10$, donde p representa el precio.

a) ¿Cuántos discos compra si el precio es ¢4 000?

Sustituyendo obtenemos:

$$q=\frac{-4000}{1000}+10\Rightarrow q=-4+10\Rightarrow q=6.$$

Compra 6 CD´s.

b) ¿Qué sucede si hay un aumento en el precio?

Observemos que la relación entre cantidad y precio es una ecuación con pendiente negativa, esto quiere decir que si aumenta el precio entonces la cantidad disminuirá.

- Cuando tenemos dos magnitudes directamente proporcionales, se pueden representar mediante una función de la forma $f(x)=kx$, donde k se llama **constante de proporcionalidad**.

EJEMPLO 10. Una empresa construye un residencial de 45 casas, para lo cual necesita 20 trabajadores. Si después quiere construir un residencial con 63 casas, ¿Cuántos trabajadores necesitan contratar? ¿Y si quiere construir 387 casas?

La manera más adecuada de resolver el problema es plantear una función entre el número de trabajadores y el número de casas que se construyen.

Esas variables son directamente proporcionales, así que si x representa el número de casas y $f(x)$ el número de trabajadores tenemos que $f(x)=kx$.

Para encontrar el valor de k tenemos que

$$f(45)=20\Rightarrow k\cdot 45=20\Rightarrow k=\frac{20}{45}=\frac{4}{9}.$$

Luego, la función es $f(x)=\frac{4x}{9}$. Y para resolver el problema sólo debemos calcular las imágenes respectivas. $f(63)=\frac{4\cdot 63}{9}=28$, se deduce que para construir 63 casas se necesitan 28 trabajadores.

$f(387)=\frac{4\cdot 387}{9}=172$, y para construir 387 casas se necesita 172 trabajadores

- Como lo citamos en la introducción, puede suceder que a las relaciones de la forma $f(x)=kx$ se le debe sumar una constante, por diversas situaciones, hasta tener relaciones de la forma $f(x)=kx+b$. Vemos, entonces, como las propiedades que hemos aprendido de la función lineal nos serán de mucha utilidad.

EJEMPLO 11. El precio de cierto tipo de computadoras es $\$800$, y se debe pagar $\$40$ de gastos de envío por cada compra hecha.

a) Exprese el precio a pagar por compra en función del número de computadoras compradas

Si x representa la cantidad de computadoras compradas y $f(x)$ el precio a pagar por ellas, incluyendo los gastos de envío, tenemos que $f:\mathbb{N}-\{0\}\rightarrow\mathbb{N},\ f(x)=800x+40$

b) Calcule el precio que debe pagar una empresa al comprar 300 computadoras.

Debemos calcular la imagen de 300, entonces $f(300)=800\cdot300+40=240\ 040$, es decir se deben pagar $\$240\ 040$ por las 300 computadoras.

c) Si una empresa pagó $\$18\,440$, ¿cuántas computadoras compró?

Nos preguntan por la preimagen de $18\,440$:

$$f(x)=18\,440\Rightarrow 800x+40=18\,440\Rightarrow 800x$$
$$=18\,400\Rightarrow x=\frac{18\,400}{800}=23$$

La empresa compró 23 computadoras.

EJEMPLO 12. Una compañía discográfica tiene costos fijos al grabar un disco independientemente de la cantidad de discos que reproduzca. Además, sabe que el costo total de producir 10 discos compactos es ¢$15\,000$ y el costo total de producir 15 discos es ¢$20\,000$. ¿Cuánto cuesta producir 20 discos?

Si b representa los costos fijos y k el costo de cada disco adicional, podemos expresar el costo de producir x discos mediante la fórmula $f(x)=kx+b$. Sabemos que $f(10)=15000$ y $f(15)=20000$.

Luego, podemos calcular

$$k=\frac{20\,000-15\,000}{15-10}=\frac{5\,000}{5}=1000$$

$\Rightarrow f(x)=1000x+b$ y para b : $f(10)=1000\cdot10+b$

$\Rightarrow 15\,000=10\,000+b\Rightarrow b=5\,000$.

Entonces, para 20 discos:

$$f(20)=20\cdot1000+5\,000=25\,000$$

EJEMPLO 13. En el país X, los taxis cobran cierta tarifa básica, además de $\$3$ por cada kilómetro recorrido. Un hombre viajó $12km$ y pagó $\$40$. ¿Cuánto viajó un hombre que pagó $\$61$?

Si b representa la tarifa básica y como el precio de cada km adicional es $\$3$, podemos expresar el costo del viaje de $x\,km$ mediante la fórmula $f(x)=3x+b$.

Si un hombre viajó $12km$ y pagó $\$40$, significa que:

$f(12)=40\Rightarrow 3\cdot12+b=40$

$\Rightarrow 36+b=40\Rightarrow b=4\Rightarrow f(x)=3x+4$.

Por último, si $f(x)=61$

$\Rightarrow 3x+4=61\Rightarrow 3x=57\Rightarrow x=19$.

Entonces, el hombre viajó $19km$

Ejercicio C.

I PARTE: Resuelva los siguientes problemas:

1. Encuentre el criterio de una función lineal, cuya gráfica pasa por lo puntos $(-3,6)$ y $(-2,5)$.

2. Encuentre las intersecciones con los ejes de una función lineal que pasa por los puntos $(-2,-4)$ y $(1,-6)$.

3. Encuentre el criterio de una función lineal que interseca el eje y en 6 y el eje x en -4.

4. Si $f(x)=5x-2b$ y $f(2)=8$, encuentre el valor de b.

5. Si $g(9)=-6$ y $g(6)=24$, encuentre el punto de intersección de g con el eje de las abscisas

II PARTE: Resuelva los siguientes problemas

1. Para un paseo de 90 personas, la compañía que lo organiza necesitará 12 buses para transportar a las personas y el equipaje que lleva cada uno. ¿Cuántos buses necesitaran para un paseo de 555 personas?

2. Con base en las marcas olímpicas, la distancia ganadora en el lanzamiento de disco es aproximadamente $d=175+1,75t$, donde d está en pies y t representa la cantidad de años después de 1948.

a) Determine la distancia aproximada ganadora en los juegos olímpicos en el año 2008.

b) Calcule en qué año aproximadamente la distancia ganadora será 315 pies.

3. La ecuación de demanda de helados en una escuela está dada por $d=20t-299$, donde t es la temperatura en grados centígrados del día. ¿Cuántos helados se demanda en un día con $38°$? ¿Y un día con $15°$?

4. Un vendedor gana un salario base de ¢$200\,000$ más un 1% de las ventas realizadas en un mes.

a) Exprese en función de las ventas mensuales, el salario del vendedor.

b) Calcule cuánto logró colocar en el mercado, un vendedor que ganó en un mes ¢$450\,000$

5. En un rectángulo, el largo mide dos unidades más que el doble del ancho.

a) Exprese el perímetro en función del ancho.

b) ¿Cuánto mide el ancho de un rectángulo, de este tipo, con perímetro $58m$?

c) ¿Y si el perímetro es $640cm$?

6. Un vendedor compra juguetes a un precio de ¢$2\,000$ cada uno para venderlos a ¢$3\,200$, pero por servicios públicos, alquiler de local y otros gastos fijos debe pagar ¢$480\,000$ mensuales.

a) Exprese la ganancia neta que obtiene al vender x juguetes.

b) ¿Cuántos juguetes debe vender para no tener ni pérdidas ni ganancias?

c) Si al final de octubre, tuvo una ganancia de ¢$420\,000$, ¿Cuántos juguetes vendió en ese mes?

7. Se sabe que cada año se asocian cuatro nuevas personas a una empresa. En el quinto año de la empresa tenía 60 socios.

a) Encuentre la ecuación de la recta que representa el número de socios de cada año.

b) ¿Cuántos socios habrá después de veinte años?

8. En un empresa, se observó la siguiente tabla con respecto a la producción de cierto artículo:

X: Cantidad	0	2	4	6	8
Y: Costo	150	175	200	225	250

a) Si suponemos una relación lineal (de recta) encuentre el valor de pendiente y la intersección con el eje y.

b) Interprete los resultados de la parte a.

c) ¿Cuál será el costo de producir 100 artículos?

AUTOEVALUACIÓN Función Lineal

I PARTE: Selección única

1) Considere la relación $A = 4l$ utilizada para encontrar el área de un rectángulo de ancho 4. Podemos afirmar que:

A) A y l son variables independientes

B) A y l son variables dependientes

C) A es dependiente de l

D) l es dependiente de A

2) Si se considera la fórmula para calcular el área de un círculo, $A = \pi r^2$ tenemos que:

A) π es un constante

B) π y r son variables independientes

C) π y r son variables dependientes

D) A es la variable independiente

3) Supongamos que en una pulpería el costo de una bolsa de maní es de $¢550$, e iremos a comprar cierta cantidad x de bolsas de maní. El precio a pagar por todas ellas, es:

A) $¢550$

B) Constante

C) Dependiente de x

D) Independiente de x

4) Considere la fórmula para calcular el área de un triángulo $A = \dfrac{b \cdot h}{2}$ donde h es la altura correspondiente a la base b. Podemos asegurar que:

A) El área depende del perímetro

B) La base depende la altura

C) La altura depende de la base

D) El área depende de la base y de la altura.

5) En una soda, el precio de una hamburguesa es $¢1500$. Entonces, el precio a pagar $F(x)$ por x hamburguesas en función de x es :

A) $F(x) = 1500 + x$

B) $F(x) = \dfrac{1500}{x}$

C) $F(x) = x - 1500$

D) $F(x) = 1500x$

6) En un triángulo rectángulo los catetos están en razón $2:3$. Entonces, la longitud del cateto mayor c en función del cateto menor x, se expresa:

A) $c(x) = 3 + 2x$

B) $c(x) = 2x + 3$

C) $c(x) = \dfrac{2x}{3}$

D) $c(x) = \dfrac{3x}{2}$

7) Considere los datos en la siguiente tabla:

x	0	1	2	3
y	3	5	7	9

Con base en ella, suponiendo que el patrón continúa, el valor de y que corresponde a $x = 4$ es

A) 10

B) 11

C) 12

D) 13

8) Considere los datos en la siguiente tabla:

x	0	2	4	6
y	30	22	14	6

Con base en ella, suponiendo que el patrón continúa, el valor de y que corresponde a $x = 7$ es

A) -8
B) -2
C) 2
D) 8

9) Considere los datos en la siguiente tabla:

x	0	3	4	7
y	11	11	11	11

Con base en ella, suponiendo que el patrón continúa, el valor de y que corresponde a $x = 11$ es

A) 11
B) 14
C) 17
D) 20

10) Respecto a la tabla de la pregunta anterior, si representamos y como una recta, tendríamos que:

A) Su pendiente es 11
B) Su pendiente es negativa
C) Su pendiente es indefinida
D) Su pendiente es nula

11) La distancia $d(x)$ que recorre un carro durante x horas a una velocidad constante de $36\,{}^{km}\!/_{h}$, se expresa mediante una función lineal de la siguiente manera:

A) $d(x) = 36x$
B) $d(x) = \dfrac{36}{x}$
C) $d(x) = \dfrac{x}{36}$
D) $d(x) = x + 36$

12) Una empresa tiene gastos fijos por ₡$12\,000$. Además. el costo de producir un artículo de los que vende es ₡200. El criterio de la función lineal que modela el costo total $c(x)$ de producir x artículos es:

A) $c(x) = 12000x + 200$
B) $c(x) = 200x - 12000$
C) $c(x) = 12000x - 200$
D) $c(x) = 200x + 12000$

13) La función $f(x) = 4 - 2x$ se clasifica como:

A) Creciente
B) Decreciente
C) Constante
D) Ninguna de las anteriores

14) Con respecto a la función lineal $f(x) = 10x - 150$, ¿Cuál de las siguientes proposiciones es verdadera?

A) Si x aumenta, $f(x)$ también aumenta
B) Si x aumenta, $f(x)$ disminuye.
C) Si x aumenta, $f(x)$ se mantiene constante.
D) No es posible establecer la relación de aumento entre las variables.

15) Con respecto a la función lineal $f(x) = 400 - x$, ¿Cuál de las siguientes proposiciones es verdadera?

A) Si x aumenta, $f(x)$ también aumenta
B) Si x aumenta, $f(x)$ disminuye.
C) Si x aumenta, $f(x)$ se mantiene constante.
D) No es posible establecer la relación de aumento entre las variables.

16) Si la función $f(x) = mx + b$ cumple que $f(2) < f(-3)$ entonces, se puede asegurar que:

A) $m > 0$
B) $m < 0$
C) $m = 0$
D) m es indefinida

17) La función de demanda de cierto producto está dada por $f(p) = -10p + 3000$ donde p representa el precio del producto. ¿Cuántos artículos se venden a un precio de ₡200?

A) 280

B) 1000

C) 2000

D) 3000

18) Con base en la función de la pregunta anterior, ¿A qué precio se logran vender 1500 productos?

A) ₡150

B) ₡450

C) ₡$12\,000$

D) ₡$18\,000$

19) La fórmula $C(x) = 2000x + 150000$ se utiliza en una empresa para determinar el costo de producir x artículos. Considere las siguientes proposiciones:

i) Por cada unidad producida el costo total aumenta en 150000

ii) El costo total de producir 30 artículos es $210\,000$

De ellas son verdaderas

A) Solo la i)

B) Solo la ii)

C) Ambas

D) Ninguna.

20) Un transportista cobra cierta cantidad por hacer un flete independientemente de la cantidad de cajas, y por cada caja un cargo adicional. Si al llevar 12 cajas cobra ₡$9\,200$ y al llevar 15 cobra ₡$10\,250$, ¿cuánto cobra por llevar 20 cajas?

A) ₡7000

B) ₡$12\,000$

C) ₡$15\,000$

D) ₡$20\,000$

21) La gráfica de una función lineal a cuyo gráfico pertenecen los puntos $(-2, 3)$ y $\left(\frac{1}{2}, 3\right)$ interseca el eje "y" en:

A) $(0, 3)$

B) $(3, 0)$

C) $\left(0, \frac{5}{2}\right)$

D) $\left(\frac{5}{2}, 0\right)$

22) En cierto país, el tipo de cambio con respecto al dólar es fijo, pero a partir de cierto día, el banco central decide aumentar el tipo de cambio, la misma cantidad cada día. Si después de 20 días el precio de un dólar es 200 y después de 45 días es $202{,}5$, entonces el precio después de 78 días será:

A) $203{,}8$

B) $205{,}8$

C) $207{,}8$

D) $209{,}8$

23) La ecuación de la recta que tiene pendiente $\frac{1}{2}$ y a la cual pertenece el punto $(4, -2)$ corresponde a:

A) $y = \frac{x}{2}$

B) $y = \frac{x}{2} - 4$

C) $y = \frac{x}{2} + 4$

D) $y = \frac{1}{2} - 4x$

24) La recta que interseca el eje "x" en $(2, 0)$ y el eje "y" en $(0, -4)$, está dada por

A) $y = 2x - 4$

B) $y = \frac{1}{2}x - 1$

C) $y = -4x + 2$

D) $y = \frac{1}{2}x - 4$

II PARTE: Resuelva los siguientes problemas.

1. Los taxis cobran una tarifa básica de $¢600$ por el primer kilómetro y $¢375$ por cada kilómetro adicional.

a) Encuentre el criterio de la función lineal que modela el cobro de un taxi en función de x, el número de kilómetro recorridos, para $x \geq 1$.

b) Si se pagan $¢6225$, ¿cuántos kilómetros se recorrieron?

2. Un modelo de costo para un producto establece que tiene un costo fijo de $¢100\,000$ y un costo por unidad de $¢250$. ¿Qué costo tendrá fabricar 102 productos?

3. Una hotel se realiza un análisis que establece que el costo diario por turista es de $¢1500$, y le cobran $¢5000$, pero deben pagar $¢150\,000$ de gastos fijos. ¿A partir de cuántos turistas tendrán ganancias?

4. Cierto producto tiene un costo de $¢800$, y se venderán 300 de estos. Si se deben pagar $¢50\,000$ de costos fijos, ¿cuál debe ser el precio mínimo para no tener pérdidas?

III PARTE: Un comerciante vende perfumes que encarga en cierto catálogo. Debe pagar un costo de membrecía mensual y luego una cantidad por cada perfume comprado. Luego, vende cada perfume a un mismo precio.

En la siguiente tabla se muestra la cantidad de perfumes, lo que pagó en algunos meses en total (costo), y el dinero que recibió por las ventas de los perfumes, en los primeros meses del año.

Mes	**Enero**	**Febrero**	**Marzo**	**Abril**
Cantidad de perfumes	8	25	35	16
Costo	$¢67\,000$	$¢152\,000$	$¢202\,000$	$¢107\,000$
Ventas	$¢52\,000$	$¢162\,500$	$¢227\,500$	$¢104\,000$
Utilidad				

1. Calcule la utilidad (ventas menos costo) de cada mes, ¿en cuáles meses tuvo pérdidas?

El vendedor quiere saber cuántos perfumes debe vender como mínimo para no tener pérdidas. Para esto:

2. Encuentre la función lineal que representa el costo total $c(x)$ por comprar x perfumes.

3. Con base en esta función, ¿cuánto es lo que paga por la membrecía mensualmente?

4. ¿Cuál es costo de cada perfume?

5. Encuentre la función lineal que representa la venta $v(x)$ por vender x perfumes.

6. Encuentre la función lineal que representa la utilidad $u(x) = v(x) - c(x)$ al vender x perfumes.

7. ¿Cuántos perfumes debe vender para que la utilidad sea 0, es decir, no tenga ganancias ni pérdidas?

8. El vendedor considera que para que le sea rentable el negocio, debería obtener al menos $¢150\,000$ como utilidad. ¿Cuántos perfumes debería vender para ganarse eso?

RESPUESTAS CAPITULO I: Función Lineal

Ejercicio A.

1. Variable independiente: valor del billete x. **Variable dependiente:** número de refrescos n. **Constantes:** precio de cada refresco $¢250$,

a) 4

b) 20

c) $n(x)=\dfrac{x}{250}$

2. Variable independiente: distancia d. **Variable dependiente:** tiempo t. **Constantes:** velocidad.

a) $t(d)=\dfrac{d}{55}$

b) $8h$

3. Variable independiente: precio a pagar por las cajas de marcadores x. **Variable dependiente:** número de cajas n. **Constantes:** precio de cada marcador $¢500$, cantidad de marcadores por caja 12

a) $n(x)=\dfrac{x}{6000}$

b) 1

c) $¢72\,000$

4. Variable independiente: número de partidos perdidos x. **Variable dependiente:** puntaje total P. **Constantes:** cantidad de puntos por partido ganado: 2,

a) $P(x)=2(48-x)$

b) 32 puntos

5. Variable independiente: número de pares de zapatos x. **Variable dependiente**. Costo total y. **Constantes:** costo en materiales $¢1500$, costo fijo $¢15\,000$ diarios.

a) $¢90\,000$

b) $¢165\,000$

c) $¢1\,515\,000$

d) $y=1500x+15000$

6. Variable independiente: presupuesto x. **Variable dependiente**. número de mesas y. **Constantes:** costo en materiales $¢5000$, gasto $¢25\,000$ diarios.

a) 25

b) 55

c) $y=\dfrac{x-25\,000}{5000}$

7. Variable independiente: número de viajes d, número de personas n. **Variable dependiente**. Ganancia total y. **Constantes:** costo por persona $¢250$, costo gasolina $¢600$ por litro. Gasto de gasolina en litros por trayecto: $4l$.

a) $¢15100$

b) $¢12800$

c) $y=250n-600\cdot 4\cdot d$

8. Variable independiente: cantidad de artículos vendidos n, gasto diario $¢m$. **Variable dependiente:** dinero ahorrado y. **Constantes:** pago fijo $¢50\,000$, pago variable $¢500$ por artículo, número de días 4.

a) $¢62\,500$

b) $¢87\,500$

c) $¢12\,000$

d) $$\begin{aligned} y &= 50000+4\cdot 500n-4m \\ &= 50000+2000n-4m \end{aligned}$$

9. Variable independiente: valor de la base mayor B. **Variable dependiente:** área del trapecio A. **Constantes:** base menor 8, altura 4

a) $40cm^2$

b) Aumenta a $64cm^2$

c) $A(B)=2B+16$

Ejercicio B.

I PARTE

1. $m<0, b>0$
2. $m=0, b>0$
3. $m<0, b<0$
4. $m>0, b>0$
5. $m=0, b<0$
6. $m>0, b=0$
7. m, b ind.
8. $m>0, b<0$
9. $m<0, b=0$
10. m, b ind.
11. $m=0, b=0$
12. m, b ind.

II PARTE

Ecuación	m	b	Clasificación
$y=-2x+1$	-2	1	Decreciente ↘
$x=-3$	Ind.	Ind.	Vertical ↑
$y=-1$	0	-1	Horizontal →
$y=0,01x-2$	$0,01$	-2	Creciente ↗
$y=\dfrac{3x-5}{2}$	$\dfrac{3}{2}$	$\dfrac{-5}{2}$	Creciente ↗
$y=\dfrac{4-5x}{2}$	$\dfrac{-5}{2}$	2	Decreciente ↘
$y=-2^{-2}x-3$	$\dfrac{-1}{4}$	-3	Decreciente ↘
$y=-x-3$	-1	-3	Decreciente ↘
$y=3x+2$	3	2	Creciente ↗

III PARTE

1. $y=-4x+26,\ x:\left(\frac{13}{2},0\right),\ y:(0,26)$
2. $y=5x-10,\ x:(2,0),\ y:(0,-10)$
3. $y=\frac{-3x+25}{5}, x:\left(\frac{25}{3},0\right),\ y:(0,5)$
4. $y=\frac{2x+1}{3}, x:\left(\frac{-1}{2},0\right),\ y:\left(0,\frac{1}{3}\right)$
5. $y=\frac{7x+4}{4}, x:\left(\frac{-4}{7},0\right),\ y:(0,1)$
6. $y=\frac{-4x-1}{7}, x:\left(\frac{-1}{4},0\right),\ y:\left(0,\frac{-1}{7}\right)$
7. $y=\frac{-3x}{2}+\frac{23}{20}, x:\left(\frac{23}{30},0\right),\ y:\left(0,\frac{23}{20}\right)$
8. $y=\frac{-21x+121}{32}, x:\left(\frac{121}{21},0\right),\ y:\left(0,\frac{121}{32}\right)$
9. $y=3,\ y:(0,3),\ x:$no
10. $x=2,\ x:(2,0),\ y:$ no
11. $y=-4,\ y:(0,-4),\ x:$no
12. $x=1,\ x:(1,0),\ y:$ no

IV PARTE

1. $y=-3x+6$
2. $y=\frac{x+15}{3}$
3. $y=\frac{-2x+12}{3}$
4. $y=\frac{3x+12}{5}$

IV PARTE

1. $x=-2$
2. $y=x/3-1$
3. $y=7/5\,x+2/5$
4. $y=\frac{-3x+36}{2}$
5. $y=\frac{-10x+50}{7}$
6. $y=-2$

Ejercicio C.

I PARTE:

1. $f(x)=-x+3$
2. $x:(-8,0)\quad y:\left(0,\frac{-16}{3}\right)$
3. $f(x)=\frac{3x+12}{2}$
4. $b=1$
5. $\left(\frac{42}{5},0\right)$

II PARTE:

1. 74 buses
2. **a)** $d\approx 280\,pies$
   b) 2028
3. 461 y 1
4. **a)** $f(x)=0,01x+200\,000$
   b) ¢25 000 000
5. **a)** $P(x)=6x+4$, **b)** $9m$ **c)** 106
6. **a)** $g(x)=1200x-480\,000$, **b)** 400
   c) 750
7. **a)** $f(x)=4x+40$, **b)** 120
8. **a)** $m=12,5\quad b=150$
   b) Por cada unidad que se aumente la producción, el costo total aumentará ¢12,5 y además, hay un costo fijo de 150 **c)** 1400

AUTOEVALUACIÓN Función Lineal

I PARTE:

1. C
2. A
3. C
4. D
5. D
6. D
7. B
8. C
9. A
10. D
11. A
12. D
13. B
14. A
15. B
16. B
17. B
18. A
19. B
20. B
21. A
22. B
23. B
24. A

II PARTE:

1. a) $f(x)=375(x-1)+600$

b) 16

2. 125 500

3. 43

4. $¢966,\overline{6}$

III PARTE:

1. Tuvo pérdidas en enero y abril

2. $c(x)=5000x+27000$

3. ¢27 000

4. ¢5000

5. $v(x)=6500x$

6. $u(x)=1500x-27000$

7. $x=18$

8. 118